LP347 — dynamique des milieux continus

TD 1

Cinématique des fluides

I Écoulement plan stationnaire

On considère l'écoulement sur un plan dont la fonction de courant est :

$$\psi(x, y) = \frac{u_0}{r_0}(x^2 - y^2)$$

où u_0 et r_0 sont une vitesse et une distance caractéristiques.

1) Exprimer les deux composantes $v_x(x, y)$ et $v_y(x, y)$ du champ de vitesse.

2) À partir de ψ, obtenir l'équation des lignes de courant de l'écoulement. Les représenter sur une figure.

3) Suggérer (sans calcul) un dispositif expérimental pour réaliser un tel écoulement.

4) Vérifier que l'écoulement est irrotationel.

5) On note $\vec{R}(\vec{R}_0, t)$ la position au cours du temps d'un flotteur librement advecté par l'écoulement à partir d'une position initiale $\vec{R}_0$. Écrire le système d'équation différentielles vérifié par R_x et R_y. Résoudre pour les conditions initiales suivantes : $R_x(0) = r_0$, $R_y(0) = 0$.

II Écoulement plan non-stationnaire

On considère un écoulement plan défini par le champ de vitesse eulerien :

$$v_x(x, y, t) = v_0 \qquad v_y(x, y, t) = at$$

où v_0 et a sont des constantes, et t la coordonnée temporelle.

1) Cet écoulement est-il compressible ? Existe-t-il une fonction de courant lui correspondant ?

2) Déterminer l'équation des lignes de courant de cet écoulement et les représenter sur un graphique pour trois dates différentes t_1, t_2 et t_3.

3) Écrire les équations différentielles vérifiées par les coordonnées d'une particule fluide : $\vec{R}(t)$.

4) Résoudre pour trouver la trajectoire de la particule de fluide située à l'origine à $t = 0$. La tracer sur le graphique précédent. On représentera notamment les vitesses aux dates t_1, t_2 et t_3.

5) Si elle existe, calculer une fonction de courant pour cet écoulement.

III Lignes de courant et trajectoires des particules fluides

On étudie l'écoulement plan stationnaire d'un fluide parfait, noté (E), dont le champ de vitesse locale au point M de coordonnées (x, y) est donné par :

$$v_x(x, y) = -\alpha x^2 y \qquad v_y(x, y) = \alpha x y^2$$

1) Vérifier que cet écoulement est incompressible.

2) On recherche l'équation cartésienne et la forme des lignes de courant du fluide.

a) Écrire l'équation différentielle décrivant les lignes de courant.

b) Montrer qu'après intégration de la relation précédente on obtient une hyperbole d'équation $xy =$ constante.

c) Représenter graphiquement l'allure de cet écoulement.

d) Établir l'expression de la fonction de courant de cet écoulement. Retrouver le résultat du b).

3) On recherche les équations paramétriques $R_x(t)$ et $R_y(t)$ de la particule fluide P de coordonnées (x_0, y_0) à l'instant $t = 0$ que l'on suit dans son mouvement (description lagrangienne).

a) Écrire le système d'équations permettant de déterminer la trajectoire de la particule fluide P.

b) Que peut-on dire des lignes de courant et des trajectoires des particules fluides lorsque l'écoulement est stationnaire ? En déduire que l'on peut utiliser le résultat écrit au 2 pour simplifier le système précédent.

c) Résoudre pour obtenir les équations paramétriques du mouvement de la particule P.

4) Exprimer la vitesse $\vec{V}(t)$ et l'accélération $\vec{A}(t)$ de cette particule fluide à partir de la description lagrangienne de la question antérieure.

5) Retrouver l'accélération de la particule du fluide de l'écoulement en utilisant une description eulérienne : on se place au point d'observation $M(x, y)$ **fixe**.